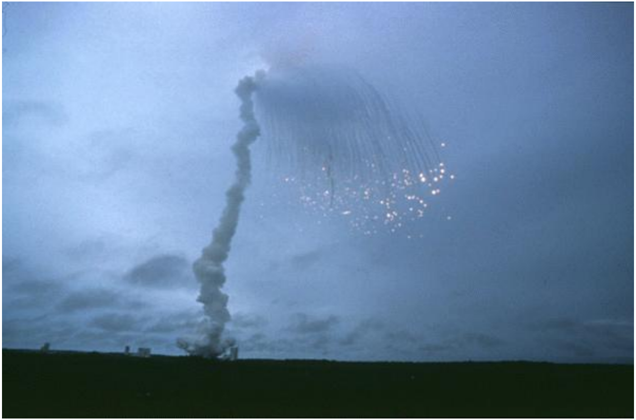
# Logik und Beweise

Vorsemesterkurs
Wintersemester 2020/21
Ronja Düffel

21. Oktober 2020

# Wozu Beweise in der Informatik?



Quelle:http://www.capcomespace.net

# Wozu Beweise in der Informatik?

- ... um Aussagen wie

  1. “Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe.”
  2. “Das Programm führt zu keiner Endlosschleife.”
  3. “Für diese Art Probleme gibt es keine effiziente Lösung”

  auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

- Richtigkeit eigener Gedanken beurteilen

# Aussagen

## Definition (mathematische Aussage)

*Eine Aussage im Sinne der Aussagenlogik ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.*

| **Aussage** | **ja** | **nein** |
|---|---|---|
| *Das Auto ist rot.* | ✓ | |
| *2 ist eine kleine Zahl.* | | ✓ |
| $2 < 1$ | ✓ | |
| $1 + 2$ | | ✓ |
| *Ist die Hose blau?* | | ✓ |
| *Wenn es regnet, ist die Straße nass.* | ✓ | |
| *Dieser Satz ist falsch.* | | ✓ |

# Negation, *nicht*

**Definition (¬, “nicht”)**

*Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht $A$') ist genau dann wahr, wenn $A$ falsch ist.*

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| Aussage | negierte Aussage |
|---|---|
| Das Auto ist rot | Das Auto ist nicht rot |
| $2 < 1$ | $2 \geq 1$ |
| $3 + 5 = 9$ | $3 + 5 \neq 9$ |

# Junktoren, *und*, *oder*

- verbinden atomare Aussage zu komplexeren Aussagen

**Definition ($\wedge$, "und")**

*$A \wedge B$ (sprich 'A und B') ist genau dann wahr, wenn sowohl $A$ als auch $B$ wahr ist.*

**Definition ($\vee$, "oder")**

*$A \vee B$ (sprich 'A oder B') ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen $A$, $B$ wahr ist.*

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Implikation

**Definition (Implikation, $\rightarrow$)**

*Seien $A$ und $B$ Aussagen. Aus Aussage $A$ (Voraussetzung) folgt $B$ (Folgerung), $A \rightarrow B$, falls gilt: Wenn $A$ wahr ist, dann ist auch $B$ wahr.*

*Wahrheitstafel:*

| $A$ | $B$ | $(A \rightarrow B)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Beispiel: Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare. Beispiel:

$\underbrace{\text{Wenn der Bewohner rot ist}}_{A}, \underbrace{\text{hat er grüne Haare}}_{B}.$

# Biimplikation

**Definition (Biimplikation, $\leftrightarrow$)**

*Die Aussage $A \leftrightarrow B$ (sprich 'A genau dann, wenn B') ist genau dann wahr, wenn sowohl $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$ wahr ist.*

*Wahrheitstafel:*

| $A$ | $B$ | $(A \rightarrow B)$ | $(B \rightarrow A)$ | $(A \leftrightarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Negation zusammengesetzter Aussagen

**Definition (Negation ($\neg$))**

*Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.*

| Aussage | negierte Aussage |
|---|---|
| Das Haus ist groß und alt. | Das Haus ist nicht groß oder nicht alt. |
| Das Auto ist rot oder blau. | Das Auto ist nicht rot und nicht blau. |
| Alle Kinder spielen gern. | Es gibt (mindestens) ein Kind, das nicht gerne spielt. |
| Es gibt blaue Elefanten. | Alle Elefanten sind nicht blau. |

**Merksatz: Negation vertauscht „und“ mit „oder“ und „Für alle“ mit „Es gibt“.**

# Warum ist Beweisen so schwierig?

- unsere natürliche Sprache ist oft mehrdeutig
- wir sind in unserem Alltag von logischen Fehlschlüssen umgeben
- Logik hilft beim Argumentieren und Aufschreiben von Beweisen
- beim *Finden* von Beweisen helfen:
  - **Erfahrung**
  - Problemlösungsstrategien
  - Kenntnis typischer Beweismuster

# Beweis

**Definition (Beweis)**

*Ein Beweis ist eine* logisch vollständige Begründung *einer Aussage.*

Solange eine Aussage nicht bewiesen ist, kann es sein, dass sie falsch ist. Egal durch wie viele Beispiele sie gestützt wird.

FERMAT-Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

*Vermutung (1637)*: Alle $F_n$ sind Primzahlen

*Widerlegt (1732)* von EULER: $F_5 = 4294967297$ ist durch 641 teilbar

# Übersicht

- **direkter Beweis**
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

# Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.
Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$A$$
$$\downarrow$$
$$\text{logische Schlussfolgerungen}$$
$$\downarrow$$
$$B$$

**Beispiel**

*Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.*

# Was brauchen wir?

**Beispiel**

*Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.*

**Definition (gerade Zahl)**

*Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.*

**Definition (Teilbarkeit)**

*Eine Zahl $a$ ist genau dann durch eine Zahl $b \neq 0$ teilbar, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = b \cdot k$.*

# Beispiel für einen direkten Beweis I

**Beispiel**

*Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.*

- Seien $a$ und $b$ gerade Zahlen.

$\Rightarrow$ $a = 2 \cdot k,\ b = 2 \cdot l,\ k, l \in \mathbb{Z}$ (Def. gerade Zahlen)

$\Rightarrow$ $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot l = 2 \cdot (k + l)$ (Einsetzen, Ausklammern)

$\Rightarrow$ $a + b = 2 \cdot m, m = l + k, m \in \mathbb{Z}$ (Abgeschlossenheit $(\mathbb{Z}, +)$)

$\Rightarrow$ $a + b$ ist durch 2 teilbar

$\Rightarrow$ $a + b$ ist gerade.

$\square$

# Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

# Beweis durch Kontraposition

**Beispiel**

*Wenn $a^2$ gerade ist, dann ist $a$ gerade.*

**Problem:** Es bietet sich kein direkter Beweis an.

**Lösung:** *Beweis durch Kontraposition*

# Zurück zur Wahrheitstafel...

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg B \rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

## Fazit

$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

## Beispiel (Planet Zutan)

*Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.*
$\equiv$*Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

# Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

**Beispiel**

*Wenn $a^2$ gerade ist, dann ist $a$ gerade.*

| Aussage | Negation |
|---|---|
| $a^2$ ist eine gerade Zahl. | $a^2$ ist eine ungerade Zahl. |
| $a$ ist eine gerade Zahl. | $a$ ist eine ungerade Zahl. |

Wir zeigen also:

**Satz**

*Wenn $a$ ungerade ist, ist auch $a^2$ ungerade.*

# Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition

**Satz**

*Wenn a ungerade ist, ist auch $a^2$ ungerade.*

Beweis:

Sei a eine beliebige **ungerade** Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k + 1$ für eine ganze Zahl $k$

$\Longrightarrow$ $a^2 = (2k + 1)^2$ für eine ganze Zahl $k$ (Quadrieren)

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2 + 2(2k \cdot 1) + 1^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1^2$ (Binomische Formel, Ausklammern)

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ mit $l = 2 \cdot k^2 + 2k$ für eine ganze Zahl $k$

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ für eine ganze Zahl $l$, da $2k^2 + 2k$ eine ganze Zahl ist, wenn $k$ eine ganze Zahl ist (Abgeschlossenheit $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$)

$\Longrightarrow$ $a^2$ ist ungerade.

$\square$

# Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

**Satz (1)**

*Wenn $a^2$ gerade ist, dann ist $a$ gerade.*

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

**Satz (2)**

*Wenn $a$ ungerade ist, dann ist $a^2$ ebenfalls ungerade.*

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

# Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

# Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

**Beispiel**

$\sqrt{2}$ *ist irrational.*

**Problem:** Wo sind Voraussetzung $A$ und Folgerung $B$?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

**Lösung:** Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

# Beispiel Widerspruchsbeweis

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$ (Definition $\mathbb{Q}$)

Nun ist $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (Quadrieren) und $2 \cdot q^2 = p^2$ (Umformen)

$\Rightarrow$ $p^2$ ist durch 2 teilbar, da $q^2 \in \mathbb{Z}$ (Def. Teilbarkeit, Abgeschlossenheit $(\mathbb{Z}, \cdot)$).

$\Rightarrow$ $p$ ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

und darstellbar als $p = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (Definition der Teilbarkeit)

$2 \cdot q^2 = (2 \cdot k)^2 \Leftrightarrow q^2 = 2 \cdot k^2$, $q^2$ ist ebenfalls durch 2 teilbar (Einsetzen und Def. Teilbarkeit),

und $q$ ist ebenfalls durch 2 teilbar. (bereits bewiesen)

Also teilt 2 sowohl $p$, wie auch $q$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $\text{ggT}(p, q) = 1$.

Damit ist $\sqrt{2}$ irrational.

$\square$

STARKER START ins Studium

# Beweistechniken

- direkter Beweis
  $A \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow B$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg B \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \neg A$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg A \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow$ Widerspruch (Falsche Aussage)

# Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$ )
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.

# Fragen?

?