Induktion

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2020/21
Ronja Düffel

23. Oktober 2020

Der kleine Gauß

Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen

  berechnet $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

- **GaußTrick:** $101 = 100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = \ldots$

  statt $1 + 2 + \cdots + 100$, rechne $101 \cdot 50$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

  insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

Beispiel Summen und Produkte

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\prod_{i=5}^{9} i = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für ein, oder einige kleine Werte von n gilt.
2. **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(2)$, wenn $A(1)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(3)$, da $A(2)$ gilt,
- $A(4)$, da $A(3)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \to A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) && \textit{Induktionsvoraussetzung anwenden} \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \textit{erweitern} \\
&= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && (n+1) \textit{ ausklammern} \\
&= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Warum geht das?

1. Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,

   dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Was kann schiefgehen? (1)

Beispiel

Kein Induktionsanfang

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* ????

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung:n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* ????

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß*
$m_2 \in M'$ *und* $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M' und M'' gleich groß.*
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M sind gleich groß.*

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel (fehlerhafte Induktion)

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang:$n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
Induktionsschritt:$n \rightarrow n + 1$
Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß.
$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M' und M'' gleich groß.
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M sind gleich groß.

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
  z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...
- es muss sich $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.