

Mengen

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2020/21
Ronja Düffel

19. Oktober 2020

Wieso, weshalb, warum?

- Wir wollen:
 - allgemeingültige Aussagen treffen.
 - "allgemeingültige" Lösungen finden.

- Wir benötigen die Möglichkeit:
 - Objekte/Konzepte zusammenzufassen
 - anhand der, für die Problemstellung relevanten Eigenschaften
 - über die wir Aussagen machen können
 - deren Eigenschaften und Aussagen wir beweisen können

- gibt es in vielen Programmiersprachen als Datentyp/Container (set)

Mengen

Definition (Menge (nach CANTOR))

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche „Elemente der Menge M “ genannt werden, zu einem Ganzen.

zum Beispiel:

- die Menge aller natürlichen Zahlen \mathbb{N}
- die Menge aller Vorkursteilnehmer
- die Menge aller Bücher in der Informatikbibliothek
- die Menge aller aussagenlogischen Formeln

Frage 13

Was ist in einer Menge wichtig?

- a) Das Vorhandensein der Elemente
- b) Die Reihenfolge der Elemente
- c) Die Häufigkeit des Auftretens der Elemente
- d) Alle drei der oben genannten Eigenschaften

Notation und Definition

Notation:

$m \in M$ $:\Leftrightarrow$ m ist Element der Menge M .

$m \notin M$ $:\Leftrightarrow$ m ist kein Element der Menge M .

- *extensional*, aufzählen der Elemente
z.B. $M_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$
- *intensional*, Angabe von charakteristischen Eigenschaften der Elemente
z.B. $M_1 := \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 7\}$

Definition (leere Menge)

Die leere Menge \emptyset ist die Menge, die kein(e) Element(e) enthält. $\emptyset = \{\}$

Beachte:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

$$\{\} \neq \{\{\}\}$$

Russel'sche Antinomie

Beispiel

Sei A die Menge aller Mengen B , die sich selbst nicht enthalten,
 $A := \{B \mid B \text{ ist eine Menge, } B \notin B\}$

Frage: Ist die Menge A in sich selbst enthalten?

$A \in A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \notin A$ ↯

$A \notin A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \in A$ ↯

Wir vermeiden Mengen mit Selbstreferenz und arbeiten weiter mit Cantors Mengenbegriff

Eigenschaften

- Alle Elemente einer Menge sind **verschieden**. D.h. kein Wert kann “mehrfach” vorkommen.
- Elemente einer Menge haben **keine** feste Reihenfolge.
- Eine Menge M kann auf verschiedenen Arten beschrieben werden

z.B:

$$\begin{aligned}
 M &:= \{1, 3, 5, 7\} \\
 &= \{3, 5, 7, 1\} \\
 &= \{1, 1, 5, 3, 5, 7\} \\
 &= \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7, x \text{ ist ungerade}\}
 \end{aligned}$$

- Mengen können auch “verschiedenartige” Elemente enthalten
z.B.: $M_d := \{7, \text{Haus}, (\text{Herz}, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}$

Definition (Gleichheit, Teilmenge, Obermenge)

Seien L und M Mengen.

- L und M sind genau dann gleich (kurz: $L = M$), wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- L ist genau dann eine Teilmenge von M (kurz: $L \subset M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist.
Bsp: $L := \{4, 2\}$ und $M := \{2, 4\}$
- L ist genau dann eine echte Teilmenge von M (kurz: $L \subsetneq M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist, aber nicht jedes Element von M auch ein Element von L .
Bsp: $L := \{4, 2\}$ und $M := \{1, 2, 4\}$
- L ist genau dann eine Obermenge von M ($L \supset M$), wenn M eine Teilmenge von L ist (kurz: $M \subset L$).
Bsp: $L := \{3, 1, 6\}$ und $M := \{3, 6\}$

Satz 1

Satz

Seien K , L und M Mengen, für die $K \subset L$ und $L \subset M$ gilt. Dann gilt auch $K \subset M$.

Beispiel

Sei $K := \{\text{Stein, Schere, Papier}\}$, $L := \{\text{Stein, Schere, Papier, Eidechse}\}$ und $M := \{\text{Stein, Schere, Papier, Eidechse, Spock}\}$.

Dann gilt:

- $K \subset L$
- $L \subset M$
- $K \subset M$

Satz 2

Satz

Seien L und M Mengen. $L = M$ gilt genau dann, wenn $L \subset M$ und $M \subset L$ gelten.

Beispiel

- Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4, 5\}$. Dann ist:
 $L = M$ und $L \subset M$ und
 $M \subset L$
 $L \subset M$
- Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4\}$. Dann ist:
 $M \subset L$ und $L \not\subset M$ und $L \neq M$

Mengenalgebra II

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz...)

Seien L und M Mengen.

- Der Schnitt von L und M ist die Menge

$$L \cap M := \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}.$$

- Die Vereinigung von L und M ist die Menge

$$L \cup M := \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}.$$

- Die Differenz von L und M ist die Menge

$$L \setminus M := \{x \mid x \in L \text{ und } x \notin M\}.$$

- L und M heißen disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element enthalten (kurz: $L \cap M = \emptyset$).

Beispiel

Sei $L := \{1, 2, 3, 6\}$ und $M := \{2, 4, 5, 6\}$

- $L \cap M = \{2, 6\}$
alle Elemente, die sowohl in L als auch in M enthalten sind
- $L \cup M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
alle Elemente, die in L oder in M enthalten sind
- $L \setminus M = \{1, 3\}$
alle Elemente, die in L aber nicht in M enthalten sind

Mächtigkeiten

Definition

- Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnet man auch als Mächtigkeit der Menge M (in Zeichen: $|M|$).
- Eine Menge M heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält, d.h. es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass M genau n viele Elemente enthält.

$$|M| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } M, & \text{falls } M \text{ endlich ist} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

z.B.:

- $|\{4, 7, 2\}| = 3$
- $|\{7, \text{Haus}, (\text{Herz}, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$ **aber** $|\{\emptyset\}| = 1$

Satz 3

Satz

Seien L und M Mengen. Es gilt $|L \cup M| = |L| + |M|$ genau dann, wenn L und M disjunkt sind.

Beispiel

- Sei $L := \{\text{Stein, Papier, Schere}\}$ und $M := \{3, \text{Haus, Spock, 5}\}$

Dann ist:

$$L \cap M = \emptyset \text{ und } L \cup M = \{\text{Stein, Papier, Schere, 3, Haus, Spock, 5}\} \text{ und} \\ |L \cup M| = 7 = 3 + 4 = |L| + |M|$$

- Sei $L := \{\text{Stein, Papier, Schere}\}$ und $M := \{\text{Schere, Haus, Spock, 5}\}$

Dann ist:

$$L \cap M = \{\text{Schere}\} \text{ und } L \cup M = \{\text{Stein, Papier, Schere, Haus, Spock, 5}\} \\ \text{und } |L \cup M| = 6 \neq 3 + 4 = |L| + |M|$$

Die Elemente der Schnittmenge werden doppelt gezählt.