Induktion und Rekursion

Vorkurs Informatik
Theoretischer Teil
WS 2013/14

2. Oktober 2013

STARKER START ins Studium

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

Beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass die Aussage A für ein (meist $n = 0$ oder $n = 1$) oder einige kleine Werte von n gilt.
2. **Induktionsschritt:** Zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls die Aussage $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(1)$, wenn $A(0)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(2)$, da $A(1)$ gilt,
- $A(3)$, da $A(2)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  Insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

  Insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

Kleiner Gauß (1/3)

Satz (Kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Kleiner Gauß (2/3)

Satz (Kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \to A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Kleiner Gauß (3/3)

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} = (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1)$$

Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \square$$

Kartesisches Produkt

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

Wahrheitstabelle

Satz

Die Wahrheitstabelle für eine aussagenlogische Formel mit insgesamt n Variablen hat genau 2^n Zeilen.

Was kann schiefgehen? (1/4)

Beispiel

Kein Induktionsanfang:

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2/4)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$*: Klar, in einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n *Paar Socken passen in den Koffer.*
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n *Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.*
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *Unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **???**

Konstruktives Argument hätte sagen müssen, wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3/4)

Beispiel

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang: $n = 1$: *In einer Menge M, in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*

Was kann schiefgehen? (4/4)

Beispiel

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n+1$ sind gleich groß.*
Beweis: *Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.*
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *Gemäß Induktionsvoraussetzung sind die Menschen in M' und M'' jeweils gleich groß.*
$m_2 \in M'$ *und* $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in M' und M'' gleich groß.*
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in M sind gleich groß.* **???**

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
- $A(n+1)$ muss sich aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Definition

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle), für den die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird.
Rekursionsschritt: Rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } n = 0 \quad \textit{(Rekursionsanfang)} \\ n \cdot f(n-1), & \textit{sonst} \quad \textit{(Rekursionsschritt)} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion (1/3)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \quad \text{(Rekursionsanfang)} \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \quad \text{(Rekursionsschritt)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot 1) = 6 \end{aligned}$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$.

Fakultätsfunktion (2/3)

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Beweis: durch Induktion nach n

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^{0} i = 1$.
Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^{0} i$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Fakultätsfunktion (3/3)

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) \\
&= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\
&= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} i
\end{aligned}
$$

$\square$

Fragen?

Quelle Bild: http://www.citycampus.eu/cms/images/comic_fragezeichen.png